



**Concours GIC session 2017**  
**Composition : Physique 1 (mécanique, thermodynamique)**  
**Durée : 4 Heures**

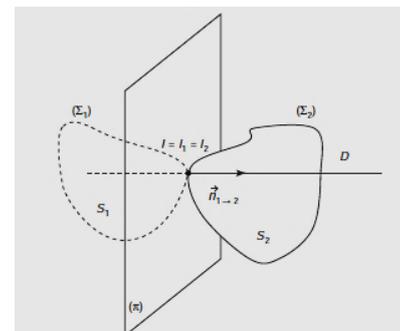
**N.B :** Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra suivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte deux parties totalement indépendantes : MECANIQUE ET THERMODYNAMIQUE

**MECANIQUE**

**Mécanique-Exercice**

1) Considérons deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. On désignera comme fixe, le référentiel  $(\mathcal{R}) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et donc en mouvement par rapport à  $(\mathcal{R})$ , le référentiel  $(\mathcal{R}') = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ . Énoncer toutes les lois de composition qui lient les grandeurs cinématiques d'un point matériel M en mouvement dans deux référentiels  $(\mathcal{R})$  et  $(\mathcal{R}')$  (par exemple  $\vec{OM}_{/\mathcal{R}}$ ,  $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$ ,  $\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M)$  comme modèle de notation) dans les cas des mouvements de translation et de rotation uniforme du référentiel  $(\mathcal{R}')$  par rapport à  $(\mathcal{R})$ .



*Figure 1*

2) En s'appuyant sur la Figure 1 ci-contre, démontrer la formule de la puissance des actions de contact.  $S_1$  subit une force  $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$  au point I, de vitesse  $\vec{v}(I \in S_1)$  dans le référentiel d'étude  $(\mathcal{R})$ .  $S_2$  subit une force de résultante  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  au point I, de vitesse  $\vec{v}(I \in S_2)$  dans le référentiel d'étude  $(\mathcal{R})$ .

**Mécanique-Problème**

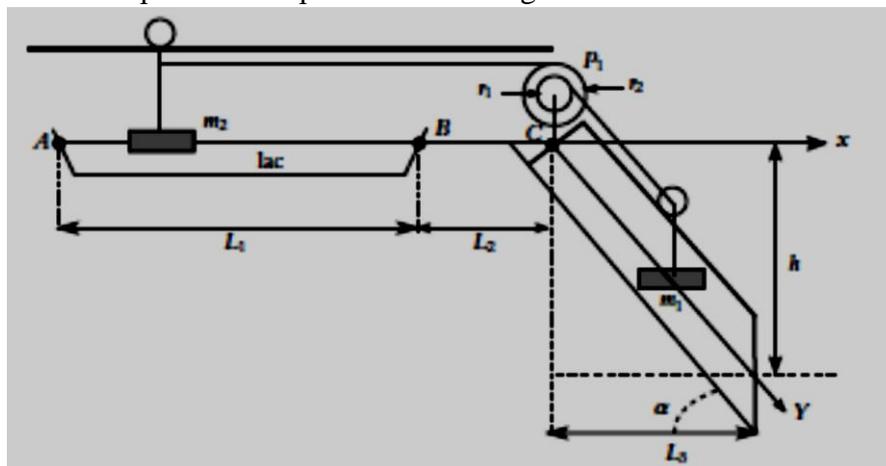
Un exploitant forestier doit évacuer des troncs d'arbres situés sur une parcelle de terrain en montagne en bordure d'un lac. Pour faciliter le transport, il utilise le poids des arbres au cours de leur descente pour en tracter d'autres à travers le lac. Le schéma du dispositif est représenté sur la Figure 2.

Au point C, un portique est installé qui supporte une poulie munie de deux gorges permettant l'enroulement des câbles.

Sur la gorge de rayon  $r_1$  sera enroulé le câble retenant dans sa descente un tronc de masse  $m_1$  assimilé pour l'étude à un point matériel.

Sur la gorge de rayon  $r_2$  sera enroulé le câble tractant deux arbres à travers le lac, symbolisés par une masse ponctuelle  $m_2$ .

Les troncs d'arbres sont suspendus à des câbles guidés par des poulies permettant un déplacement considéré sans frottement sur le câble. Les câbles sont supposés inextensibles et de masse négligeable.



*Figure 2*

Les troncs se déplaçant dans l'eau, subissent une force de frottement visqueux de la part de l'eau :  $\vec{f}_v = -k\vec{v}$ .  
Les troncs et leurs supports sont assimilés à des points matériels dont la masse totale est celle des troncs.

Données :  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $m_1 = 500 \text{ kg}$  ;  $m_2 = 1000 \text{ kg}$  ;  $h = 300 \text{ m}$  ;  $L_1 = 840 \text{ m}$  ;  $L_2 = 4 \text{ m}$  ;  $L_3 = 300 \text{ m}$  ;  $k = 30 \text{ kg.s}^{-1}$  ;  $r_1 = 20 \text{ cm}$  ;  $r_2 = 40 \text{ cm}$ .

### 1. Déplacement sur l'eau

1.a) On repère le déplacement de  $m_2$  par la variable  $x$  de l'axe  $Ax$  (Figure 2). Établir l'équation différentielle du mouvement de  $m_2$ . On note  $T_2$  la norme de la tension du câble.

1.b) On repère le déplacement de  $m_1$  par la variable  $Y$  de l'axe  $CY$  parallèle à la ligne de plus grande pente (Figure 2). On note  $T_1$  la norme de la tension du câble. Établir l'équation différentielle du mouvement de  $m_1$ .

1.c) Déterminer le lien entre  $\ddot{x}$  et  $\ddot{Y}$  dû à la poulie.

1.d) On admet que la poulie  $C$  impose une relation entre les tensions :  $T_2 r_2 - T_1 r_1 + \Gamma = 0$ ,  $\Gamma$  étant une grandeur positive constante modélisant l'action d'un frein sur la poulie. Déduire des calculs précédents, l'équation différentielle en  $\dot{x}$  en fonction de  $m_1$ ,  $M = m_2 + m_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ ,  $\Gamma$ ,  $k$ ,  $g$  et  $\sin\alpha$ .

1.e) Montrer l'existence d'une vitesse limite  $v_L$  et d'une constante de temps  $\tau$ . Donner leurs expressions littérales et leurs valeurs numériques (on prendra  $\Gamma = 680 \text{ Nm}$ ).

1.f) Déterminer l'expression de  $x(t)$  sachant qu'à  $t = 0$ , les troncs sont en A et sans vitesse initiale. Évaluer l'ordre de grandeur du temps au bout duquel la vitesse limite est atteinte.

1.g) Déterminer l'expression complète  $x(t)$ .

1.h) Calculer le temps  $t_2$  nécessaire aux troncs pour traverser le lac à vitesse constante  $v_L$ . Justifier que le temps réel de parcours sur le lac de A à B pourra être assimilé à  $t_2$ .

### 2. Déplacement sur le sol

Après leur sortie du lac en B, les arbres se déplacent sur le sol. Ils sont alors soumis à un frottement solide. On rappelle que le coefficient de frottement  $f$  est égal à 0,2. On n'exerce alors plus de freinage sur  $m_1$  ( $\Gamma = 0$ ).

2.a) Établir la nouvelle équation différentielle du second ordre en  $x$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $f$ ,  $M$ ,  $g$  et  $\sin\alpha$ .

2.b) Calculer l'accélération  $\ddot{x}$  et en déduire le mouvement de  $m_2$ .

2.c) Calculer l'accélération  $\ddot{Y}$  de  $m_1$ .

2.d) Montrer que la vitesse de  $m_2$  s'annule en un point noté E2. Quelle est alors la distance  $d_2$  parcourue sur le sol de B à E2 ?

2.e) Préciser la position de  $m_1$  sur le plan incliné par rapport au point d'arrivée D.

## THERMODYNAMIQUE

### Thermodynamique-Exercice :

Répondre par Vrai ou Faux. Justifier votre réponse

1) Le premier principe s'écrit  $\Delta U = nC_V \Delta T$  pour un gaz parfait.

2) Il existe une expression de l'échange thermique élémentaire  $\delta Q$  de même qu'il existe l'expression du travail  $\delta W = -P dV$ .

3) La définition de l'enthalpie est  $\Delta H = Q$ .

4) L'existence de frottement rend une transformation irréversible.

5) Les expressions de  $dU$  et  $dS$  dépendent du modèle de système considéré.

6) La variation d'entropie est égale à la variation d'entropie échangée plus la variation d'entropie créée.

7) La somme  $\int_I^F \frac{\delta Q}{T}$  dépend en général du chemin suivi entre l'état  $I$  et l'état  $F$ .

8) Quand on fait fondre un glaçon, sa température augmente puisqu'on lui apporte de l'énergie thermique.

9) Un système fermé évolue de telle sorte que son entropie augmente.

10) On note  $Q_F$  l'énergie thermique reçue algébriquement de la part de la source « froide » par la quantité de fluide caloporteur prise comme système thermodynamique. Dans une machine thermique où l'on cherche à baisser la température de la source froide, on a  $Q_F < 0$ .

11) Dans une pompe à chaleur, la source froide est la pièce de la maison dont on veut élever la température.

12) Pour étudier un fluide en écoulement, on considère comme système thermodynamique une surface fermée.

13) Le travail élémentaire des forces de pression s'écrit  $dW = -P_{EXT} dV$

14) Le travail maximum que l'on peut récupérer par une transformation monobare et monotherme d'un système fermé est égal à la diminution de l'enthalpie libre du système.

15) Un système fermé évolue spontanément de façon isobare et isotherme de telle sorte que son enthalpie libre augmente.

### Thermodynamique-Problème

I-) Une masse constante de gaz parfait, dont le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants est  $\gamma = 1,4$ , parcourt le cycle représenté sur le schéma de la Figure 3 ci-contre.

I.1) Le gaz initialement dans l'état d'équilibre thermodynamique A caractérisé par une pression  $P_A = 10^5 Pa$ , une température  $T_A = 144,4 K$  et un volume  $V_A = 4,14 \cdot 10^{-4} m^3$  subit une évolution isentropique qui l'amène à la température  $T_B = 278,8 K$ .

I.1.a) Calculer la pression  $P_B$  du gaz dans ce nouvel état d'équilibre B.

I.1.b) Calculer  $V_B$ .

I.2) Le gaz est mis en contact avec une source à la température  $T_B$  et subit une détente isotherme réversible qui ramène son volume à sa valeur initiale  $V_A$ .

I.2.a) Calculer la valeur  $P_C$  de la pression dans ce nouvel état d'équilibre C.

I.2.b) Calculer la variation d'entropie  $\Delta S_{BC}$  du gaz au cours de son évolution isotherme BC.

I.3) Le gaz dans l'état d'équilibre C est alors mis en contact avec une source à la température  $T_A$  tandis que son volume est maintenu constant à la valeur  $V_A$ .

I.3.a) Calculer la variation d'entropie  $\Delta S_{CA}$  du gaz au cours de cette évolution isochore.

I.3.b) Calculer la quantité de chaleur  $Q_{CA}$  échangée avec la source.

I.3.c) En déduire la valeur  $S_{CA}^F$  de l'entropie créée au cours de l'évolution isochore.

II-) On considère un gaz de masse molaire  $M = 32,0 \cdot 10^{-3} kg \cdot mol^{-1}$  décrit par le modèle du gaz parfait. Il est dans l'état  $(p_0, V_0, T_0)$  avec  $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 Pa$  et  $T_0 = 273 K$ . On étudie la compression d'une masse  $m = 1,0 kg$  de ce gaz de la valeur  $p_0$  à une valeur  $p_F = 3,0 \cdot 10^5 Pa$  de la pression. On prendra  $R = 8,32 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ . On suppose que la compression est réversible mais *non adiabatique*. Elle est telle qu'à chaque instant  $pV^\alpha = p_0V_0^\alpha$  où  $\alpha$  est une constante différente de  $\gamma = C_p/C_v$ .

II.1) Montrer que l'échange thermique élémentaire  $\delta Q$  reçu par le gaz est proportionnel au travail élémentaire  $\delta W$  qu'il reçoit. Exprimer le coefficient de proportionnalité en fonction de  $\alpha$  et  $\gamma$ .

II.2) Exprimer le travail reçu par le gaz au cours de la compression. Faire l'application numérique si  $\alpha = 1,2$  et le volume final  $V_F = 0,32 m^3$ .

III-) On considère un système isolé thermiquement formé de deux récipients a et b de volumes invariables, reliés par une canalisation munie d'un robinet. Initialement, le robinet est fermé, le récipient a contient  $n_A$  moles d'un gaz A décrit par le modèle du gaz parfait, à la température  $T$ ; le récipient b contient  $n_B$  moles d'un gaz B décrit par le modèle du gaz parfait à la même température  $T$ . Les volumes de a et b sont tels que les deux gaz sont à la même pression  $p$ . On ouvre le robinet et on laisse les gaz se mélanger. Le mélange est idéal.

III.1) Quelle est la variation d'énergie interne du système au cours de ce processus ? Quelles sont, une fois l'équilibre final établi, les valeurs de la température et de la pression ?

III.2) Trouver les expressions de l'entropie d'une mole d'un gaz décrit par le modèle du gaz parfait  $S(T, V)$  puis  $S(T, p)$ .

III.3) Quelles sont, dans le mélange, les pressions partielles des gaz A et B ? En déduire la variation d'entropie du système, au cours du processus, en fonction de  $R$ ,  $n_A$  et  $n_B$ .

IV-) On met en contact direct un thermostat ( $T_0 = 300 K$ ) et une certaine quantité d'eau ( $T_{1,0} = 370 K$ ,  $C_p = 5,0 \cdot 10^3 J \cdot K^{-1}$ ).

IV.1.a) Évaluer l'énergie thermique reçue par l'eau lorsque l'eau est en équilibre thermique avec le thermostat.

IV.1.b) En considérant le système {thermostat  $\cup$  eau} comme isolé, évaluer la création d'entropie  $\Sigma_0$  au cours de l'opération.

IV.2) On fait travailler une machine thermique entre l'eau et le thermostat en fonctionnement irréversible. Lorsque la machine s'arrête, l'entropie créée vaut  $x \cdot \Sigma_0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ). Calculer le travail fourni par la machine, le rendement  $\rho_M$  de la machine en fonctionnement réversible et le rapport  $R = \rho/\rho_M$  du rendement réel sur le rendement idéal.

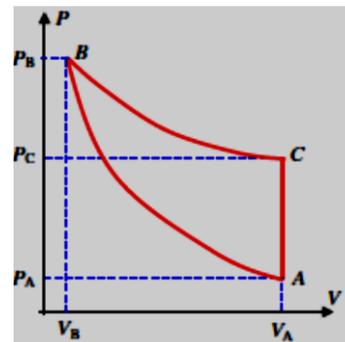


Figure 3

**V-)** Une pompe à chaleur est utilisée dans un système de chauffage et asséchage de l'air d'un hall de piscine. À cet effet, l'air chargé de vapeur d'eau, à la température  $T_0$ , est aspiré dans un premier échangeur de chaleur  $\mathcal{E}_1$  d'où il ressort asséché à la température  $T_1$ . L'air asséché passe dans un deuxième échangeur de chaleur  $\mathcal{E}_2$  d'où il ressort à la température  $T_2$ . La pompe à chaleur est disposée entre les sources  $\mathcal{E}_1(T_1)$  et  $\mathcal{E}_2(T_2)$ . Son efficacité est notée  $e$ . La pression de l'air est constante et égale à un bar. On note  $L_{VAP}$  la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau et  $D$  le débit volumique d'eau condensée par le système. La capacité thermique molaire à pression constante de l'air est notée  $C_P$ .

*Données numériques :*  $L_{VAP} = 2,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  ;  $C_P = 29,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;  $D = 3,5 \text{ l} \cdot \text{h}^{-1}$  ;  $e = 3,6$  ;  $T_0 = 300 \text{ K}$  ;  $T_1 = 291 \text{ K}$  ;  $T_2 = 313 \text{ K}$ .

**V.1)** On note  $Q_1$  l'énergie thermique reçue par le fluide caloporteur de la pompe pendant une durée  $\tau$  de la part de  $\mathcal{E}_1$  et  $Q_2$  celle reçue de la part de  $\mathcal{E}_2$ .

**V.1.a)** Commenter la valeur numérique de  $e$ .

**V.1.b)** Exprimer le rapport  $\frac{Q_1}{Q_2}$  en fonction de  $e$ .

**V.2)** On note  $n$  la quantité d'air humide qui traverse la pompe pendant la durée  $\tau$ .

**V.2.a)** Exprimer  $Q_1$  en fonction de  $n$ ,  $\tau$ ,  $C_P$ ,  $\rho$ ,  $D$ ,  $L_{VAP}$ ,  $T_1$  et  $T_0$ .

**V.2.b)** Exprimer  $Q_2$ .

**V.2.c)** En déduire le rapport  $n/\tau$  puis le débit volumique d'air (en  $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ ) de l'installation. L'air, même humide, est décrit par le modèle du gaz parfait.

**V.2.d)** Calculer l'efficacité globale de l'installation pour le réchauffement de l'air du hall.

**VI-)** Calculer la variation d'entropie d'un kilogramme de glace initialement à  $-20^\circ\text{C}$  sous la pression atmosphérique (prise égale à 1 bar), entièrement vaporisée à  $200^\circ\text{C}$ , cette vapeur étant ensuite chauffée à volume constant jusqu'à  $300^\circ\text{C}$ . On admettra que la vapeur se comporte comme un gaz parfait dans ces conditions.

	solide	liquide	vapeur
capacité thermique massique (en $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ )	2,1	4,2	1,35 (à volume constant)
chaleur latente massique de changement d'état (en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ )	$\text{sol} \rightarrow \text{liq}$ 335	$\text{liq} \rightarrow \text{vap}$ 1960 (à $200^\circ\text{C}$ )	

**VII-)** Un récipient fermé, parfaitement calorifugé, contient 1 g de vapeur d'eau à  $150^\circ\text{C}$  sous 1 bar. On y introduit 1 g d'eau liquide à  $10^\circ\text{C}$ . La pression dans le récipient est maintenue égale à 1 bar.

**VII.1)** Calculer la température finale et la quantité finale d'eau liquide.

**VII.2)** Exprimer la variation d'entropie relative à la masse d'eau initialement à l'état vapeur, entre l'état initial et l'état final.

**VII.3)** Exprimer la variation d'entropie relative à la masse d'eau initialement à l'état liquide, entre l'état initial et l'état final.

**VII.4)** Que peut-on dire de la somme des variations d'entropie calculées aux questions VII.2 et VII.3.

*Données :*  $c_L = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;  $c_{P(VAP)} = 2000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;  $\ell_{VAP} = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  ; La vapeur d'eau est décrite par le modèle du gaz parfait de masse molaire  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

# MECANIQUE

## MECANIQUE-EXERCICE

1) Considérons deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. On désignera comme fixe, le référentiel  $(\mathcal{R}) = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et donc en mouvement par rapport à  $(\mathcal{R})$ , le référentiel  $(\mathcal{R}') = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ .

Lois de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_{/\mathcal{R}}(O') : \text{Translation}$$

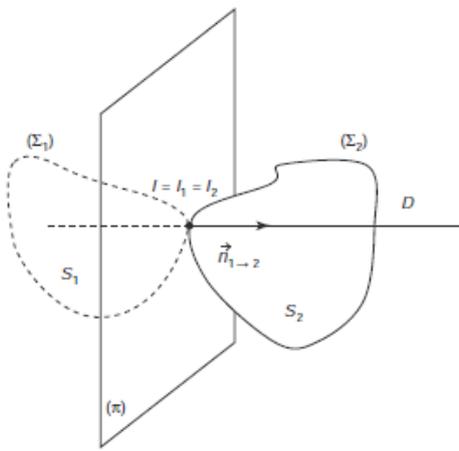
$$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_{/\mathcal{R}}(O') + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} : \text{Rotation uniforme autour d'un axe fixe (Oz)}$$

Lois de composition des accélérations :

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_{/\mathcal{R}}(O') : \text{Translation}$$

$$\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{/\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_{/\mathcal{R}}(O') + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) : \text{Rotation uniforme autour d'un axe fixe (Oz).}$$

Avec  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} = \dot{\theta} \vec{k}$  : le vecteur rotation du référentiel  $(\mathcal{R}')$  par rapport à  $(\mathcal{R})$ .



2) Exprimons tout d'abord la puissance des actions de contact sur chacun des deux solides.

–  $S_2$  subit une force de résultante  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  au point  $I$ , de vitesse  $\vec{v}(I \in S_2)$  dans le référentiel d'étude  $(\mathcal{R})$ .

La puissance  $P_2$  de cette force sur  $S_2$  est

$$P_2 = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I \in S_2)$$

–  $S_1$  subit une force  $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$  au point  $I$ , de vitesse  $\vec{v}(I \in S_1)$  dans le référentiel d'étude  $(\mathcal{R})$ .

La puissance  $P_1$  de cette force sur est  $P_1 = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(I \in S_1)$

La puissance des actions de contact sur le système de deux solides vaut alors :

$P = P_1 + P_2 = \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(I \in S_1) + \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I \in S_2)$ . Le principe des actions réciproques implique que  $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  et donc que :  $P = -\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I \in S_1) + \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I \in S_2)$  ;

$P = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot [\vec{v}(I \in S_2) - \vec{v}(I \in S_1)] = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g$ . Or, nous savons que :

$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2},$$

Par conséquent,  $P = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g = (\vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}) \cdot \vec{v}_g = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g$ .  $P = \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g$

## MECANIQUE-PROBLEME

On considère le référentiel terrestre galiléen. Les systèmes considérés seront tour à tour le point  $M_1$  de masse  $m_1$  et le point  $M_2$  de masse  $m_2$ .

1. Les forces qui s'exercent sur  $M_1$  et  $M_2$  sont représentées sur les figures (S5.7 et S5.8). Les forces  $\vec{R}_{N1}$  et  $\vec{R}_{N2}$  représentent les résultantes des réactions normales (contacts poulie-support, poussée d'Archimède exercée par l'eau).

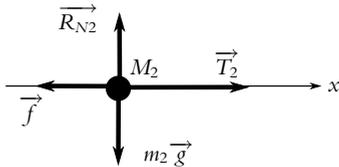


Figure S5.7

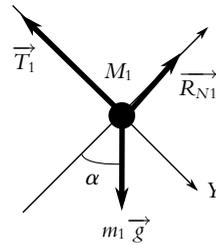


Figure S5.8

- 1.a) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à  $M_2$ , en projection sur l'axe  $Ax$  donne :

$$m_2 \ddot{x} = -k\dot{x} + T_2 \quad (1)$$

- 1.b) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à  $M_1$ , en projection sur l'axe  $CY$  donne :

$$m_1 \ddot{Y} = -T_1 + m_1 g \sin \alpha \quad (2)$$

- 1.c) Les points de contact des câbles avec la poulie ont la même vitesse angulaire  $\omega$ . D'autre part comme les câbles sont toujours tendus, chacun de leur point a la même vitesse que les troncs. On déduit  $\dot{x} = r_2 \omega$  et  $\dot{Y} = r_1 \omega$ , soit en dérivant :

$$\frac{\ddot{x}}{r_2} = \ddot{Y} \quad (3)$$

- 1.d) De la relation entre les tensions, on tire  $T_2 = \frac{-\Gamma + T_1 r_1}{r_2}$ . On exprime  $T_1$  avec la relation (2), puis on remplace  $\ddot{Y}$  par son expression tirée de la relation (3). On reporte ces expressions dans la relation (1) et on trouve :

$$M\ddot{x} + k\dot{x} = -\frac{\Gamma}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} m_1 g \sin \alpha$$

- 1.e) Sans résoudre l'équation, on peut trouver la vitesse limite qui correspond à une accélération nulle (les forces motrices équilibrent alors les forces résistantes). Cela conduit à :

$$v_L = \frac{-\Gamma + r_1 m_1 g \sin \alpha}{kr_2}$$

En ce qui concerne la constante de temps on l'obtient en divisant l'équation différentielle par  $M$  ce qui conduit à une équation de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = \frac{-\Gamma}{Mr_2} + \frac{r_1}{Mr_2} m_1 g \sin \alpha$$

avec  $\tau = M/k$ . L'application numérique donne  $\tau = 37,5$  s et pour  $v_L$ , il faut d'abord calculer  $\alpha = \arctan(h/L_3) = 45^\circ$  soit  $v_L = 0,65 \text{ m.s}^{-1}$ .

1.f) On peut mettre l'équation différentielle sous la forme :

$$x + \frac{\dot{x}}{\tau} = \frac{v_L}{\tau}$$

La solution est  $\dot{x} = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_L$ . Au départ, les troncs d'arbres sont immobiles donc  $x'(0) = 0$ , ce qui entraîne :  $\dot{x} = v_L \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ . On calcule le temps pour lequel  $\dot{x} = 0,99v_L$ , ce qui donne 173 s ou 2,9 mn.

1.g) Le temps mis pour traverser le lac est :  $t_2 = L_1/v_L = 21,5$  mn. On peut donc considérer que la traversée se fait à la vitesse constante  $v_L$  (sauf les trois premières minutes) et assimiler le temps de traversée à  $t_2$ .

2. a) Les forces s'exerçant sur  $m_2$  sont : le poids,  $\vec{T}_2$  et l'on remplace  $\vec{R}_{N_2}$  par  $\vec{R}_n$  et  $\vec{f}$  par  $\vec{R}_t$ . La relation fondamentale de la dynamique  $m_2 \vec{a} = \vec{T}_2 + \vec{R}_n + \vec{R}_t + m_2 \vec{g}$  donne en projection sur la verticale :  $0 = R_n - m_2 g$ , d'où l'équation projetée sur  $Ax$  :

$$m_2 \ddot{x} = T_2 - f m_2 g$$

L'équation différentielle pour  $Y$  est la même que précédemment, en revanche la relation pour la poulie donne  $T_2 r_2 = T_1 r_1$ . Enfin, la relation entre  $\dot{x}$  et  $\dot{Y}$  est inchangée. On obtient alors :

$$M \ddot{x} = m_1 \frac{r_1}{r_2} g \sin \alpha - m_2 f g$$

2.b) L'accélération est donc constante : on a affaire à un mouvement uniformément accéléré. Si l'on change l'origine des temps en prenant le passage en  $B$  comme nouveau  $t = 0$ , sachant qu'en ce point,  $\dot{x} = v_L$ , on obtient :

$$\ddot{x} = \frac{g}{M} \left( m_1 \frac{r_1}{r_2} \sin \alpha - m_2 f \right) \Rightarrow \dot{x} = \frac{gt}{M} \left( m_1 \frac{r_1}{r_2} \sin \alpha - m_2 f \right) + v_L$$

et :

$$x = \frac{gt^2}{2M} \left( m_1 \frac{r_1}{r_2} \sin \alpha - m_2 f \right) + v_L t$$

2.c) On obtient  $\dot{Y}$  grâce à la relation avec  $\dot{x}$ , soit :

$$\dot{Y} = \frac{r_1}{r_2} \dot{x} = \frac{r_1}{r_2} \frac{g}{M} \left( m_1 \frac{r_1}{r_2} \sin \alpha - m_2 f \right)$$

2.d) La vitesse s'annule à l'instant  $t_n$  :

$$\dot{x}(t_n) = 0 \Rightarrow t_n = -\frac{M}{g} \frac{v_L}{m_1 \frac{r_1}{r_2} \sin \alpha - m_2 f}$$

Numériquement, cette grandeur est positive ce qui montre l'existence de l'arrêt. On peut alors calculer la position d'arrêt en remplaçant  $t$  par  $t_n$  dans l'expression de  $x$  :

$$d_2 = x(t_n) = \frac{M}{2g} \frac{v_L^2}{m_2 f - m_1 \frac{r_1}{r_2} \sin \alpha}$$

L'application numérique donne  $d_2 = 1$  m.

2.e) En raison du rapport 2 des rayons des deux poulies, le point  $M_1$  aura parcourue une distance deux fois plus petite que  $M_2$  soit 150,5 m.

# THERMODYNAMIQUE-EXERCICE

	VRAI	FAUX
1) Le premier principe s'écrit $\Delta U = nC_v\Delta T$ pour un gaz parfait.	*	
2) Il existe une expression de l'échange thermique élémentaire $\delta Q$ de même qu'il existe l'expression du travail $\delta W = -PdV$		*
3) La définition de l'enthalpie est $\Delta H = Q$ .		*
4) L'existence de frottement rend une transformation irréversible.		*
5) Les expressions de $dU$ et $dS$ dépendant du modèle de système considérée.	*	
6) La variation d'entropie est égale à la variation d'entropie échangée plus la variation d'entropie créée.		*
7) La somme $\int_I^F \frac{\delta Q}{T}$ dépend en général du chemin suivi entre l'état $I$ et l'état $F$ .	*	
8) Quand on fait fondre un glaçon, sa température augmente puisqu'on lui apporte de l'énergie thermique.		*
9) Un système fermé évolue de telle sorte que son entropie augmente.		*
10) On note $Q_F$ l'énergie thermique reçue algébriquement de la part de la source « froide » par la quantité de fluide caloporteur prise comme système thermodynamique. Dans une machine thermique où l'on cherche à baisser la température de la source froide, on a $Q_F < 0$ .		*
11) Dans une pompe à chaleur, la source froide est la pièce de la maison dont on veut élever la température.		*
12) Pour étudier un fluide en écoulement, on considère comme système thermodynamique une surface fermée .	*	
13) Le travail élémentaire des forces de pression s'écrit $dW = -P_{EXT}dV$	*	
14) Le travail maximum que l'on peut récupérer par une transformation monobare et monotherme d'un système fermé est égal à la diminution de l'enthalpie libre du système.	*	
15) Un système fermé évolue spontanément de façon isobare et isotherme de telle sorte que son enthalpie libre augmente.		*

# THERMODYNAMIQUE-PROBLEME

I-1-a) Le système étudié est la masse  $m$  fixée de gaz.

La transformation de  $A$  à  $B$  est isentropique, le gaz parfait et  $\gamma$  constant. On peut donc utiliser la loi de Laplace  $P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma = P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma$ . On en déduit  $P_B = P_A (T_A / T_B)^{\gamma/(1-\gamma)}$ .

A.N.  $P_B = (10^5)(144,4/278,8)^{1,4/(1-1,4)} = 10^6 \text{ Pa}$  soit  $P_B = 10 P_A$ .

I-1-b) L'équation d'état du gaz parfait conduit à  $V_B = nR \frac{T_B}{P_B}$  avec  $nR = \frac{P_A V_A}{T_A}$  donc

$$V_B = V_A \frac{P_A T_B}{T_A P_B}$$

A.N.  $V_B = (4,14 \times 10^{-4}) \frac{1}{10} \frac{278,8}{144,4} = 0,8 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ .

I-2-a) On a cette fois  $P_C = nR \frac{T_B}{V_A} = \left( \frac{P_A V_A}{T_A} \right) \frac{T_B}{V_A}$  soit  $P_C = P_A \left( \frac{T_B}{T_A} \right)$ .

A.N.  $P_C = 10^5 \left( \frac{278,8}{144,4} \right) = 1,93 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

I-2-b) La transformation est réversible donc le deuxième principe s'écrit  $S_C - S_B = S_{\text{ECH}}$  avec  $S_{\text{ECH}} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T}$ . Mais le premier principe s'écrit  $dU = \delta W + \delta Q$ . Le gaz étant décrit par le modèle du gaz parfait, on a  $dU = C_V dT$ . Puisque la transformation est isotherme, il reste  $\delta Q = -\delta W = +PdV$ . en reportant, on obtient  $\Delta S_{\text{BC}} = \int_{V_B}^{V_C} \frac{P}{T} dV = \int_{V_B}^{V_C} \frac{P_A V_A}{T_A} \frac{dV}{V} = \frac{P_A V_A}{T_A} \ln \left( \frac{V_C}{V_B} \right)$  soit

$$\Delta S_{\text{BC}} = \frac{P_A V_A}{T_A} \ln \left( \frac{V_A}{V_B} \right) \text{ puisque } V_C = V_A.$$

A.N.  $\Delta S_{\text{BC}} = \frac{(10^5)(4,14 \times 10^{-4})}{144,4} \ln \left( \frac{4,14 \times 10^{-4}}{0,8 \times 10^{-4}} \right) = 0,471 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

I-3-a) On imagine une transformation réversible entre l'état  $C$  et l'état  $A$ . Cela suppose un contact avec une source dont la température varie lentement de  $T_C = T_B$  à  $T_A$ .

La variation d'entropie est  $\Delta S_{\text{CA}} = \int_C^A \frac{\delta Q}{T}$ .

Pour une transformation élémentaire, le premier principe s'écrit  $dU = \delta W + \delta Q$  avec  $dU = C_V dT$  et  $\delta W = -PdV = 0$  puisque la transformation est isochore.

On a donc  $\Delta S_{\text{CA}} = \int_{T_B}^{T_A} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln \left( \frac{T_A}{T_B} \right)$ .

Comme le gaz est parfait, on a  $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$  où  $nR = \frac{P_A V_A}{T_A}$ . Il reste donc

$$\Delta S_{\text{CA}} = \frac{P_A V_A}{T_A (\gamma-1)} \ln \left( \frac{T_A}{T_B} \right).$$

$$\text{A.N. } \Delta S_{CA} = \frac{(10^5)(4,14 \times 10^{-4})}{144,4(1,4-1)} \ln\left(\frac{144,4}{278,8}\right) = -0,472 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}.$$

I-3-b) D'après ce qui précède,  $\delta Q = C_V dT$  au cours de la transformation isochore donc

$$Q_{CA} = C_V (T_A - T_B). \text{ Comme } C_V = \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{P_A V_A}{T_A (\gamma-1)}, \text{ il reste } Q_{CA} = \frac{P_A V_A}{(\gamma-1)} \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right).$$

$$\text{A.N. } Q_{CA} = \frac{(10^5)(4,14 \times 10^{-4})}{(1,4-1)} \left(1 - \frac{278,8}{144,4}\right) = -96,33 \text{ J}.$$

I-3-c) La transformation réelle n'est pas réversible. La variation d'entropie est

$$\Delta S_{CA} = \int_C^A \frac{\delta Q}{T_A} + S_{CA}^c \text{ puisque la température du transfert thermique est constante et vaut } T_A. \text{ On en}$$

$$\text{déduit } S_{CA}^c = \Delta S_{CA} - \frac{Q_{CA}}{T_A}.$$

$$\text{A.N. } S_{CA}^c = -0,472 - \frac{(-96,33)}{144,4} = 0,195 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}.$$

On constate que  $S_{CA}^c > 0$  ce qui est cohérent. La transformation est irréversible. La température du système n'est pas constamment égale à  $T_A$ , seule la température de la surface l'est : la transformation est monotherme.

II-1) Le système thermodynamique est la quantité de gaz de masse  $m$ . Il est globalement au repos dans le référentiel d'étude.

Au cours d'une transformation élémentaire, le premier principe s'écrit  $dU = \delta Q + \delta W$ .

Dans le modèle du gaz parfait, on peut écrire  $dU = nC_{V,MOL}dT$  avec  $C_{V,MOL} = \frac{R}{\gamma-1}$ .

Le travail élémentaire des forces de pression s'écrit  $\delta W = -p_{EXT}dV$ . Comme la transformation est réversible, en particulier mécaniquement, on a  $p = p_{EXT}$  dans chaque état donc  $\delta W = -pdV$  et il reste  $\delta Q = nC_{V,MOL}dT + pdV$ .

Avec la relation  $p(V) = \frac{k}{V^\alpha}$  vérifiée le long de la transformation, il vient

$$\delta Q = nC_{V,MOL}dT + \frac{k}{V^\alpha}dV.$$

L'équation d'état du gaz parfait s'écrit  $T = \frac{pV}{nR}$  soit  $T = \frac{k}{nRV^{\alpha-1}}$  donc

$$dT = -(\alpha-1)\frac{k}{nRV^\alpha}dV.$$

$$\begin{aligned} \text{En reportant, on obtient } \delta Q &= -n\frac{R}{\gamma-1}(\alpha-1)\frac{k}{nRV^\alpha}dV + \frac{k}{V^\alpha}dV = \left(-\frac{\alpha-1}{\gamma-1} + 1\right)\frac{k}{V^\alpha}dV \\ &= \left(1 - \frac{\alpha-1}{\gamma-1}\right)pdV \text{ soit } \delta Q = -\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-1}\delta W. \end{aligned}$$

Remarque : si  $\alpha = \gamma$ , alors  $\delta Q = 0$  : la transformation est adiabatique et réversible et le gaz est décrit par le modèle du gaz parfait donc il suit la loi de Laplace  $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$ .

$$\text{II-2) On a } W = \int_{V_1}^{V_F} -p(V) dV = \int_{V_1}^{V_F} -\frac{p_0 V_0^\alpha}{V^\alpha} dV = \frac{p_0 V_0^\alpha}{\alpha - 1} \left[ \frac{1}{V_F^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_1^{\alpha-1}} \right]. \text{ Comme } p_0 V_0^\alpha = p_F V_F^\alpha = p_1 V_1^\alpha, \text{ on peut \u00e9crire } W = \frac{1}{\alpha - 1} \left[ \frac{p_F V_F^\alpha}{V_F^{\alpha-1}} - \frac{p_1 V_1^\alpha}{V_1^{\alpha-1}} \right] \text{ ou encore } W = \frac{p_F V_F - p_1 V_1}{\alpha - 1}.$$

$$\text{A.N. D'apr\u00e8s l'\u00e9quation d'\u00e9tat } p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_0 \text{ donc } W = \frac{(3 \times 10^5) \cdot (0,32) - \frac{(8,31) \cdot (273)}{32 \times 10^{-3}}}{1,2 - 1} = 125,1 \text{ kJ.}$$

III-1) Le syst\u00e8me thermodynamique consid\u00e9r\u00e9 est l'ensemble constitu\u00e9 de  $n_1$  moles de gaz A et  $n_2$  mole de gaz B. Le premier principe s'\u00e9crit  $U_F - U_I = Q + W$ .

- le syst\u00e8me est isol\u00e9 thermiquement donc  $Q = 0$  ;
- le volume des r\u00e9cipients est invariable donc le travail des forces de pression est nul soit  $W = 0$ .

Il reste alors  $U_F - U_I = 0$ .

Le m\u00e9lange est id\u00e9al et les gaz d\u00e9crits par le mod\u00e8le du gaz parfait. L'\u00e9nergie interne ne d\u00e9pend donc que de  $T$  d'apr\u00e8s la premi\u00e8re loi de Joule.  $U_F = U_I$  entra\u00eene alors  $T_F = T_I$ .

Lorsque le m\u00e9lange est \u00e0 l'\u00e9quilibre, on peut utiliser l'\u00e9quation d'\u00e9tat du gaz parfait soit

$$p_F = \frac{(n_A + n_B) RT}{V_A + V_B}.$$

Remarque : dans l'\u00e9tat initial o\u00f9 les gaz sont s\u00e9par\u00e9s, on a  $p_A = \frac{n_A RT}{V_A}$  et  $p_B = \frac{n_B RT}{V_B}$  avec  $p_A = p_B = p$  par hypoth\u00e8se. On a donc  $n_A/V_A = n_B/V_B = (n_A + n_B)/(V_A + V_B)$ . On en d\u00e9duit  $p_F = p$ .

III-2) Pour un fluide quelconque, l'identit\u00e9 thermodynamique s'\u00e9crit  $dU = TdS - pdV$ . Pour une quantit\u00e9  $n$  de gaz d\u00e9crit par le mod\u00e8le du gaz parfait, on peut \u00e9crire  $dU = nC_V dT$  donc il reste  $dS = nC_V \frac{dT}{T} + \frac{p(T, V)}{T} dV$ . On sait que l'on peut \u00e9crire  $dS = \frac{\partial S(T, V)}{\partial T} dT + \frac{\partial S(T, V)}{\partial V} dV$  donc

$\frac{\partial S(T, V)}{\partial T} = \frac{nC_V}{T}$ . En supposant que  $C_V$  ne d\u00e9pend pas de  $T$ , on peut en d\u00e9duire

$S(T, V) = nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + f(V)$ . Cette expression conduit \u00e0  $\frac{df(V)}{dV} = \frac{p(T, V)}{T} = \frac{nR}{V}$ . La primitive

est  $f(V) = nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + f_0$ . On peut noter  $S(T_0, V_0) = f_0$  et l'on a alors

$$S(T, V) = nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S(T_0, V_0).$$

Par ailleurs,  $\frac{V}{V_0} = \frac{T p_0}{T_0 p}$  d'apr\u00e8s l'\u00e9quation d'\u00e9tat. En reportant, il vient

$$S(T, p) = nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{T p_0}{T_0 p}\right) + S(T_0, p_0) = n(C_V + R) \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) + S(T_0, p_0).$$

Dans le mod\u00e8le du gaz parfait, on sait que  $C_P - C_V = R$  donc il reste

$$S(T, p) = nC_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S(T_0, p_0).$$

III-3) Par définition, les pressions partielles des gaz sont  $p_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} p = x_A p$  et

$$p_B = \frac{n_B}{n_A + n_B} p = x_B p \text{ en notant } x_A \text{ et } x_B \text{ les fractions molaires respectives des deux gaz.}$$

L'entropie est une fonction d'état extensive donc, pour le mélange, on peut écrire  $S = S_A + S_B = S(T, p_A) + S(T, p_B)$ .

Avec la question précédente, on obtient dans l'état final du mélange :

$$\begin{aligned} S_F &= n_A C_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - n_A R \ln\left(\frac{p_A}{p_0}\right) + S_A(T_0, p_0) + n_B C_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - n_B R \ln\left(\frac{p_B}{p_0}\right) + S_B(T_0, p_0) \\ &= (n_A C_{PA} + n_B C_{PB}) \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \left[ n_A \ln\left(x_A \frac{p}{p_0}\right) + n_B \ln\left(x_B \frac{p}{p_0}\right) \right] + S_A(T_0, p_0) + S_B(T_0, p_0) \end{aligned}$$

Dans l'état initial, on avait

$$S_I = n_A C_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - n_A R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S_A(T_0, p_0) + n_B C_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - n_B R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S_B(T_0, p_0) \text{ donc}$$

la variation d'entropie du système pendant le mélange est

$$S_F - S_I = -n_A R \ln\left(x_A \frac{p}{p_0}\right) + n_A R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) - n_B R \ln\left(x_B \frac{p}{p_0}\right) + n_B R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \text{ soit}$$

$$S_F - S_I = -R \left[ n_A \ln(x_A) + n_B \ln(x_B) \right].$$

Comme le système considéré est thermiquement isolé, il n'y a pas d'entropie d'échange donc cette variation d'entropie est seulement due à l'entropie créée par l'irréversibilité du processus de mélange.

IV-1-a) Considérons la quantité  $n$  d'eau comme système thermodynamique.

Elle évolue à pression constante donc le premier principe s'écrit  $(H_F - H_I)_{\text{EAU}} = Q_{\text{EAU}}$  où  $Q_{\text{EAU}}$  est l'énergie reçue par le système sous forme thermique.

L'eau liquide est un système condensé donc  $(H_F - H_I)_{\text{EAU}} = C_P(T_0 - T_{1,0})$  et l'on peut écrire

$$Q_{\text{EAU}} = C_P(T_0 - T_{1,0}). \text{ A.N. } Q_{\text{EAU}} = (5 \times 10^3)(300 - 370) = -350 \text{ kJ.}$$

IV-1-b) Pour le système thermostat  $\cup$  eau qui est isolé, on a  $S_F - S_I = \Sigma_0$  car il n'y a pas d'entropie d'échange.

L'entropie est additive donc  $S_F - S_I = (S_F - S_I)_{\text{EAU}} + (S_F - S_I)_{\text{THERM}}$ .

L'entropie étant une fonction d'état et les états extrêmes de la transformation de l'eau étant connus, on peut imaginer une transformation réversible entre  $T_{1,0}$  et  $T_0$  pour laquelle on peut écrire

$$dS_{\text{EAU}} = \frac{\delta Q_{\text{EAU}}}{T_{\text{EAU}}} \text{ avec } \delta Q_{\text{EAU}} = C_P dT_{\text{EAU}} \text{ d'après la question précédente. On a donc}$$

$$(S_F - S_I)_{\text{EAU}} = \int_{T_{1,0}}^{T_0} \frac{C_P dT_{\text{EAU}}}{T_{\text{EAU}}} \text{ d'où } (S_F - S_I)_{\text{EAU}} = C_P \ln\left(\frac{T_0}{T_{1,0}}\right).$$

Le thermostat évolue à température constante donc  $(S_F - S_I)_{\text{THERM}} = \int_{\text{INIT}}^{\text{FIN}} \frac{\delta Q_{\text{THERM}}}{T_0} = \frac{Q_{\text{THERM}}}{T_0}$ .

$$\text{Or } Q_{\text{THERM}} = -Q_{\text{EAU}} = -C_P(T_{1,0} - T_0). \text{ On obtient donc } (S_F - S_I)_{\text{THERM}} = -C_P \left(1 - \frac{T_{1,0}}{T_0}\right).$$

On en déduit donc  $\Sigma_0 = C_p \ln\left(\frac{T_0}{T_{1,0}}\right) - C_p \left(1 - \frac{T_{1,0}}{T_0}\right)$ .

A.N.  $\Sigma_0 = (5 \times 10^3) \ln\left(\frac{300}{370}\right) - (5 \times 10^3) \left(1 - \frac{300}{370}\right) = 118 \text{ J.K}^{-1}$ .

On vérifie que l'on a bien  $\Sigma_0 > 0$  comme il se doit. Par contre  $(S_F - S_i)_{\text{EAU}} < 0$  mais elle ne constitue pas un système isolé.

IV-2) Considérons comme système une masse  $m$  de fluide caloporteur de la machine, qui subit des cycles. Il reçoit au cours d'un cycle, l'énergie thermique  $Q_1$  de la part de l'eau,  $Q_2$  de la part du thermostat et le travail  $W$ .

Le premier principe appliqué à ce système s'écrit  $\Delta U_{\text{MACH}} = Q_1 + Q_2 + W$ . Sur un cycle,  $\Delta U = 0$  donc il reste  $Q_1 + Q_2 + W = 0$ .

Or  $Q_1 = -Q_{\text{EAU}} = -C_p(T_0 - T_{1,0})$  donc  $Q_2 + W = C_p(T_0 - T_{1,0})$ .

Considérons comme système la réunion {fluide de la machine  $\cup$  eau  $\cup$  thermostat}. Il est isolé donc  $\Delta S = x\Sigma_0$  par hypothèse.

L'entropie est additive donc  $\Delta S = \Delta S_{\text{MACH}} + \Delta S_{\text{EAU}} + \Delta S_{\text{THERM}}$ .

Sur un cycle, on a  $\Delta S_{\text{MACH}} = 0$ . On a calculé  $\Delta S_{\text{EAU}} = C_p \ln\left(\frac{T_0}{T_{1,0}}\right)$  à la question précédente.

Pour le thermostat qui évolue à température constante, on a  $\Delta S_{\text{THERM}} = \frac{Q_{\text{THERM}}}{T_0}$ . Ici,  $Q_{\text{THERM}} = -Q_2$

donc en reportant, on obtient  $C_p \ln\left(\frac{T_0}{T_{1,0}}\right) - \frac{Q_2}{T_0} = x\Sigma_0$ . On en déduit l'expression de  $Q_2$  puis

$$W = C_p(T_0 - T_{1,0}) - C_p T_0 \ln\left(\frac{T_0}{T_{1,0}}\right) + x\Sigma_0 T_0.$$

Avec l'expression de  $\Sigma_0$  obtenue à la question précédente, on peut écrire encore  $W = (x-1)\Sigma_0 T_0$ . Le travail fourni par la machine est donc  $W_F = (1-x)\Sigma_0 T_0$ .

Ce travail est positif : la machine fonctionne en moteur.

Le rendement de la machine est défini par  $\rho = W_F/Q_1$  car  $Q_1$  est l'énergie reçue effectivement sous forme thermique par la machine. On peut écrire  $\rho = \frac{(1-x)\Sigma_0 T_0}{C_p(T_{1,0} - T_0)}$ .

Si le fonctionnement est réversible, il n'y a pas d'entropie créée dans ce fonctionnement donc  $x = 0$  et le rendement devient  $\rho_M = \frac{\Sigma_0 T_0}{C_p(T_{1,0} - T_0)}$ .

On a donc  $\rho = (1-x)\rho_M$  puis  $R = 1-x$ . On a évidemment  $R < 1$ .

V-1-a) On a  $e = 3,6 > 1$  ce qui n'est pas surprenant pour l'efficacité d'une pompe à chaleur. Avec les valeurs de  $T_1$  et  $T_2$  indiquées, le théorème de Carnot prévoit, pour une machine ditherme, la valeur maximale  $e = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$  soit numériquement  $e = \frac{313}{313 - 291} = 14,2$ .

L'efficacité de la pompe réelle est donc bien inférieure à la valeur maximale possible.

V-1-b) Notons,  $W$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  les échanges d'énergie définis du point de vue de la pompe. Le premier principe appliqué à une quantité  $n$  de fluide caloporteur de la pompe effectuant un cycle s'écrit  $W + Q_1 + Q_2 = 0$ .

Par définition de l'efficacité,  $e = -Q_2/W$  car  $Q_2 < 0$  est l'énergie thermique fournie à la source dont on veut élever la température, ici l'échangeur (2) qui est à la température du hall.

On peut donc écrire  $-Q_2/e + Q_1 + Q_2 = 0$  d'où  $Q_1 = Q_2(1/e - 1)$ . On a donc  $Q_1/Q_2 = 1/e - 1$ .

V-2-a) Dans l'échangeur (1), l'air passe de la température  $T_0$  à la température  $T_1$ . Il reçoit pour cela l'énergie thermique  $q_{\text{AIR}} = H_1 - H_0$  car la transformation est isobare. Comme  $H_1 - H_0 = nC_p(T_1 - T_0)$ , il reste  $q_{\text{AIR}} = nC_p(T_1 - T_0)$ .

La masse  $m$  de vapeur d'eau que contenait l'air avant cet échangeur se condense à pression constante et reçoit pour cela l'énergie  $q_{\text{EAU}} = H_{\text{LIQ}} - H_{\text{VAP}} = m(-L_{\text{VAP}})$ . Le débit volumique d'eau condensée étant  $D$ , la masse condensée pendant une durée  $\tau$  est  $m = \rho D\tau$ .

L'échange thermique reçu par le fluide caloporteur de la pompe dans l'échangeur (1) est donc  $Q_1 = -nC_p(T_1 - T_0) + \rho D\tau L_{\text{VAP}}$ .

V-2-b) Dans l'échangeur (2), l'air passe de la température  $T_1$  à la température  $T_2$  et il reçoit l'énergie thermique  $q_{\text{AIR}}' = nC_p(T_2 - T_1)$ . L'échange thermique reçu par le fluide caloporteur de la pompe dans l'échangeur (2) est donc  $Q_2 = -nC_p(T_2 - T_1)$ .

V-2-c) D'après la question 1-b, on a  $\frac{1}{e} - 1 = \frac{-nC_p(T_1 - T_0) + \rho D\tau L_{\text{VAP}}}{-nC_p(T_2 - T_1)}$  donc

$\left(\frac{1}{e} - 1\right)nC_p(T_2 - T_1) - nC_p(T_1 - T_0) = -\rho D\tau L_{\text{VAP}}$ . On en déduit

$$\frac{n}{\tau} = \frac{-\rho D L_{\text{VAP}}}{C_p} \frac{1}{(T_2 - T_0) - \frac{1}{e}(T_2 - T_1)}$$

Comme  $V = nRT_0/P$  pour le gaz entrant dans la machine qui est décrit par le modèle du gaz parfait, on peut écrire  $D_v = \frac{nRT_0}{\tau P}$  soit  $D_v = \frac{-\rho D L_{\text{VAP}}}{C_p} \frac{1}{(T_2 - T_0) - \frac{1}{e}(T_2 - T_1)} \frac{RT_0}{P}$ .

$$\text{A.N. } D_v = \frac{-(10^3) \cdot (3,5 \times 10^{-3}) \cdot (2,5 \times 10^3)}{29,3} \frac{1}{(13) - \frac{1}{3,6}(22)} \frac{(8,314) \cdot (300)}{(10^5)} = 1,08 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$$

V-2-d) L'énergie reçue sous forme thermique par la quantité  $n$  d'air qui a circulé dans la pompe est  $q_{\text{AIR}} = nC_p(T_1 - T_0) + nC_p(T_2 - T_1) = nC_p(T_2 - T_0)$ .

L'efficacité de l'installation est  $\eta = q_{\text{AIR}}/W = \frac{nC_p(T_2 - T_0)}{-Q_2/e} = \frac{nC_p(T_2 - T_0)}{nC_p(T_2 - T_1)}e$  soit

$$\eta = e \frac{T_2 - T_0}{T_2 - T_1}. \text{ A.N. } r = 3,6 \frac{13}{22} = 2,13.$$

VI-On considère comme système thermodynamique un échantillon d'eau de masse 1 kilogramme.

Dans l'état initial, le système est solide à la température  $T_i$ , sous la pression  $p^\circ$ .

Dans l'état final, il est vapeur à la température  $T_F$ , sous la pression  $p_F(V_F, T_F)$ .

La transformation envisagée n'est pas réversible mais comme  $S$  est une fonction d'état, on peut imaginer un chemin quelconque entre l'état initial et l'état final pour calculer sa variation. On envisage donc le chemin entièrement réversible suivant:

On a  $T_A = T_B = T_{FUS} = 273 \text{ K}$  puisque l'on est sous 1 bar.

Alors  $S_F - S_I = (S_F - S_D) + (S_D - S_C) + \dots + (S_C - S_B) + (S_B - S_A) + (S_A - S_I)$ .

Comme les transformations sont réversibles, on a  $S_{EF} - S_{EI} = \int_{EI}^{EF} \frac{\delta Q}{T}$  pour chacune avec, par les transformations  $IA, AB, BC$  et  $CD$  qui sont isobares,  $\delta Q = dH$ .

• La transformation  $I \rightarrow A$  est une variation de température d'un corps condensé (monophasé solide) donc  $dH = mc_{SOL}dT$ . On en déduit

$$S_A - S_I = \int_{T_I}^{T_A} \frac{mc_{SOL}dT}{T} = mc_{SOL} \ln\left(\frac{T_A}{T_I}\right).$$

• La transformation  $A \rightarrow B$  est une fusion d'un corps pur (donc à  $T = T_{FUS}$  constant) pour laquelle  $dH = \ell_{FUS}dm$  d'où  $S_B - S_A = \int_A^B \frac{\ell_{FUS}dm}{T_{FUS}} = \frac{\ell_{FUS}m}{T_{FUS}}$ .

• La transformation  $B \rightarrow C$  est une variation de température d'un corps condensé (monophasé liquide) donc  $dH = mc_{LIQ}dT$ . On en déduit  $S_C - S_B = \int_{T_B}^{T_C} \frac{mc_{LIQ}dT}{T} = mc_{LIQ} \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right)$ .

• La transformation  $C \rightarrow D$  est une vaporisation d'un corps pur (donc à  $T$  constant) pour laquelle  $dH = \ell_{VAP}dm$  d'où  $S_D - S_C = \int_C^D \frac{\ell_{VAP}dm}{T_C} = \frac{\ell_{VAP}m}{T_C}$ .

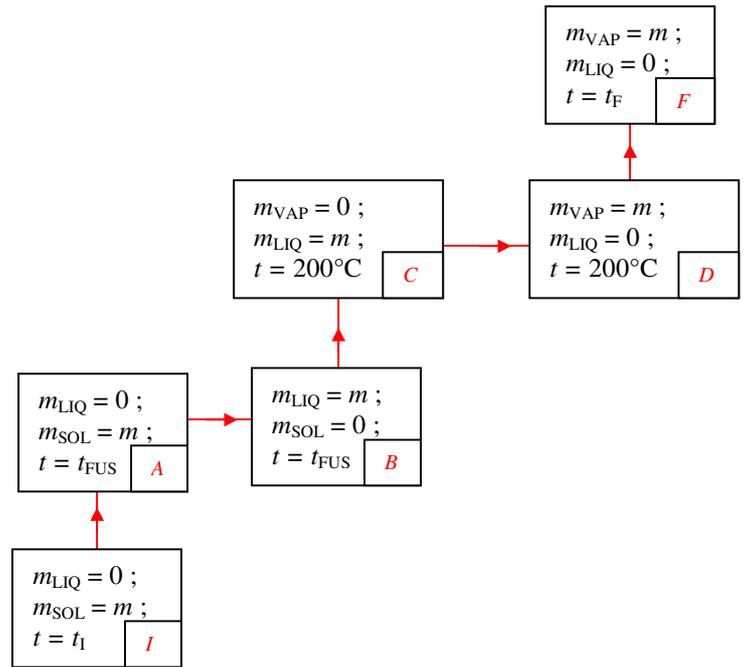
• La transformation  $D \rightarrow F$  est une variation de température d'un corps gazeux décrit par le modèle du gaz parfait. Le premier principe s'écrit  $dU = \delta Q + \delta W$  avec  $dU = mc_VdT$  dans ce modèle et  $\delta W = -pdV$ . Comme la transformation est isochore, il vient  $\delta W = 0$  et il reste  $\delta Q = mc_VdT$ .

$$\text{On en déduit } S_F - S_D = \int_{T_D}^{T_F} \frac{mc_VdT}{T} = mc_V \ln\left(\frac{T_F}{T_D}\right).$$

On obtient finalement

$$S_F - S_I = mc_{SOL} \ln\left(\frac{T_A}{T_I}\right) + \frac{\ell_{FUS}m}{T_{FUS}} + mc_{LIQ} \ln\left(\frac{T_C}{T_{FUS}}\right) + \frac{\ell_{VAP}m}{T_C} + mc_V \ln\left(\frac{T_F}{T_D}\right)$$

$$\text{A.N. } S_F - S_I = (2,1) \ln\left(\frac{273}{253}\right) + \frac{335}{273} + (4,2) \ln\left(\frac{473}{273}\right) + \frac{1960}{473} + (1,35) \ln\left(\frac{573}{473}\right) = 8,10 \text{ kJ.K}^{-1}.$$



VII-1) Le système thermodynamique est la masse  $2m = 2 \text{ g}$  d'eau. Sa température n'est pas homogène dans l'état initial donc on le considère formé de deux sous-systèmes homogènes initialement :

• sous-système (a) : dans l'état initial, on a  $m = 1 \text{ g}$  de vapeur à la température  $T_1 = 150^\circ\text{C}$  ; on a alors  $m_L = 0$  et  $m_V = m$ .

- sous-système (b) : dans l'état initial,  $m = 1\text{g}$  de liquide à la température  $T_2 = 10^\circ\text{C}$ .

On a alors  $m_L = m$  et  $m_V = 0$ .

Dans l'état final, la température est  $T_F$  pour les deux sous-systèmes. On a trois cas possibles :

- le système est monophasé vapeur. Alors  $m_L = 0$  et  $m_V = 2m$ . La température est  $T_F$  : c'est la seule inconnue et elle doit vérifier la contrainte  $T_F > T_{\text{VAP}}$  ;
- le système est diphasé liquide-solide : on a alors  $m_L = x$ ,  $m_V = 2m - x$ . La température est nécessairement  $T_{\text{VAP}} = 100^\circ\text{C}$  puisque que l'on est sous la pression de 1 bar. La seule inconnue est donc  $x$  qui doit vérifier la contrainte  $0 < x < 2m$ .
- le système est monophasé liquide. Alors  $m_L = 2m$  et  $m_V = 0$ . La température est  $T_F$  : c'est la seule inconnue et elle doit vérifier la contrainte  $T_F < T_{\text{VAP}}$ .

La transformation subie par le système total est isobare. On peut donc écrire le premier principe sous la forme  $H_F - H_I = Q$ .

Le récipient est calorifugé donc on peut considérer la transformation comme adiabatique donc  $Q = 0$  et il reste  $H_I - H_F = 0$ .

L'enthalpie est additive donc  $H_I - H_F = (H_I - H_F)_a - (H_I - H_F)_b$ .

La transformation réelle n'est pas réversible et on ne peut pas la modéliser. Mais  $H$  est une fonction d'état donc on peut imaginer un autre chemin entre l'état initial et l'état final permettant d'exprimer la variation  $H_F - H_I$ .

1<sup>er</sup> cas :

On représente le chemin imaginé par le trajet et (1) pour le sous-système (a) et (2) + (3) + (4) pour le sous-système (b) dans le schéma ci-contre.

- L'étape (1) est une variation de température isobare d'un corps vapeur donc  $(H_F - H_I)_{a1} = m c_{P(\text{VAP})}(T_F - T_1)$ .
- L'étape (2) est une élévation de température d'un corps condensé liquide donc  $(H_F - H_I)_{b2} = m c_L(T_{\text{VAP}} - T_2)$ .
- L'étape (3) est un changement d'état (vaporisation) d'une masse  $m$  donc  $(H_F - H_I)_{b3} = m \ell_{\text{VAP}}$ .
- L'étape (4) est une élévation de température isobare d'un corps vapeur donc  $(H_F - H_I)_{b4} = m c_{P(\text{VAP})}(T_F - T_{\text{VAP}})$ .

Il vient donc  $(H_F - H_I) = m c_{P(\text{VAP})}(T_F - T_1) + m c_L(T_{\text{VAP}} - T_2) + m \ell_{\text{VAP}} + \dots$

$\dots + m c_{P(\text{VAP})}(T_F - T_{\text{VAP}}) = 0$  d'où  $2c_{P(\text{VAP})}T_F = c_{\text{VAP}}(T_{\text{VAP}} + T_1) - \ell_{\text{VAP}} - c_L(T_{\text{VAP}} - T_2)$  soit

$$T_F = \frac{1}{2}(T_{\text{VAP}} + T_1) - \frac{\ell_{\text{VAP}}}{2c_{P(\text{VAP})}} - \frac{c_L}{2c_{P(\text{VAP})}}(T_{\text{VAP}} - T_2).$$

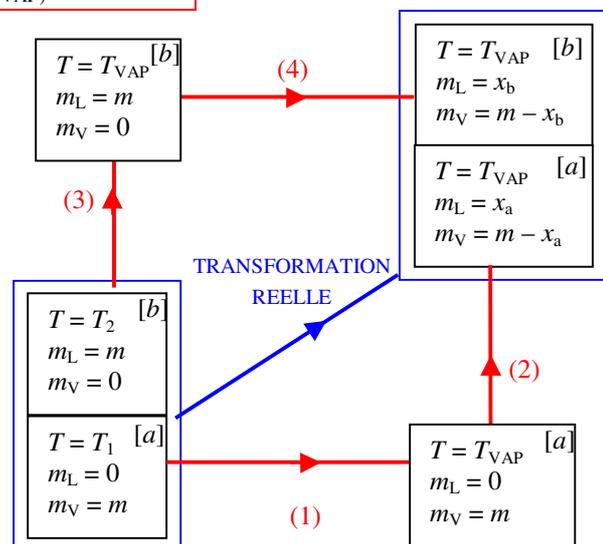
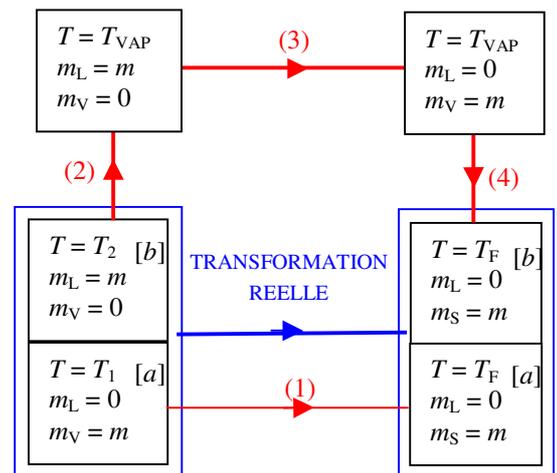
A.N.

$$T_F = \frac{1}{2}(373 + 423) - \frac{2260 \times 10^3}{2(2000)} - \frac{4200}{2(2000)}(373 - 283) = -261 \text{ K} : \text{ce résultat est absurde et cette hypothèse est donc à rejeter.}$$

2<sup>ème</sup> cas :

On représente le chemin imaginé par le trajet (1) + (2) pour le sous-système (a) et (3) + (4) pour le sous-système (b) dans le schéma ci-contre.

- L'étape (1) est une variation de température isobare d'un corps vapeur donc  $(H_F - H_I)_{a1} = m c_{P(\text{VAP})}(T_{\text{VAP}} - T_1)$ .



- L'étape (2) est un changement d'état (condensation) d'une masse  $x_a$  de vapeur donc  $(H_F - H_F)_{a2} = x_a(-\ell_{VAP})$ .

- L'étape (3) est une variation de température d'un corps condensé liquide donc  $(H_F - H_I)_{b3} = m c_L(T_{VAP} - T_2)$ .

- L'étape (4) est un changement d'état (vaporisation) d'une masse  $m - x_b$  de liquide donc  $(H_F - H_F)_{b4} = (m - x_b)\ell_{VAP}$ .

Il vient donc

$$(H_F - H_I) = m c_{P(VAP)}(T_{VAP} - T_1) - x_a \ell_{VAP} + m c_L(T_{VAP} - T_2) + (m - x_b)\ell_{VAP} = 0 \text{ avec } x = x_a + x_b$$

d'où

$$x = m \frac{c_{P(VAP)}}{\ell_{VAP}} (T_{VAP} - T_1) + m \frac{c_L}{\ell_{VAP}} (T_{VAP} - T_2) + m.$$

A.N.  $x = 1 \frac{2000}{2260 \times 10^3} (373 - 423) + 1 \frac{4200}{2260 \times 10^3} (373 - 283) + 1 = 1,12 \text{ g.}$

Cette valeur est compatible avec la contrainte imposée. Elle est donc acceptable.

3ème cas :

On représente le chemin imaginé par le trajet et (1) + (2) + (3) pour le sous-système (a) et (4) pour le sous-système (b) dans le schéma ci-contre.

- L'étape (1) est une variation de température isobare d'un corps vapeur donc  $(H_F - H_I)_{a1} = m c_{P(VAP)}(T_{VAP} - T_1)$ .

- L'étape (2) est un changement d'état (condensation) d'une masse  $m$  donc  $(H_F - H_I)_{a2} = -m \ell_{VAP}$ .

- L'étape (3) est une variation de température d'un corps condensé liquide donc  $(H_F - H_I)_{a3} = m c_{PL}(T_F - T_{VAP})$ .

- L'étape (4) est une variation de température d'un corps condensé liquide donc  $(H_F - H_I)_{b4} = m c_L(T_F - T_2)$ .

Il vient donc

$$(H_F - H_I) = m c_{P(VAP)}(T_{VAP} - T_1) - m \ell_{VAP} + m c_{PL}(T_F - T_{VAP}) + m c_L(T_F - T_2) = 0$$

d'où  $2 c_L T_F = c_L (T_{VAP} + T_2) + \ell_{VAP} - c_{P,VAP} (T_{VAP} - T_1)$  soit

$$T_F = \frac{1}{2} (T_{VAP} + T_2) + \frac{\ell_{VAP}}{2 c_L} - \frac{c_{P(VAP)}}{2 c_L} (T_{VAP} - T_1).$$

A.N.  $T_F = \frac{1}{2} (373 + 283) + \frac{2260 \times 10^3}{2(4200)} - \frac{2000}{2(4200)} (373 - 423) = +609 \text{ K}$  : ce résultat est absurde et cette hypothèse est donc à rejeter.

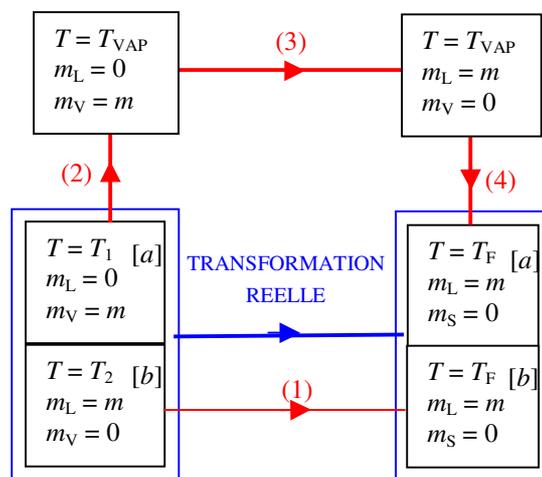
Conclusion : L'état final du système est **diphase** à la température 100°C avec une masse  $m_L = 1,12 \text{ g}$  de liquide et  $m_V = 0,88 \text{ g}$  de vapeur.

VII-2) On imagine que le chemin entre l'état initial et l'état final est parcouru réversiblement.

Alors  $(S_F - S_I)_a = \int_I^F \frac{\delta Q}{T}$ . Le deuxième cas étant validé, on peut écrire

$$(S_F - S_I)_a = \int_{T_1}^{T_{VAP}} \frac{m c_{P,VAP} dT}{T} - \frac{x_a \ell_{VAP}}{T_{VAP}} \text{ soit } (S_F - S_I)_a = m c_{P,VAP} \ln\left(\frac{T_{VAP}}{T_1}\right) - \frac{x_a \ell_{VAP}}{T_{VAP}}.$$

3) On imagine que le chemin entre l'état initial et l'état final est parcouru réversiblement. Alors  $(S_F - S_I)_b = \int_I^F \frac{\delta Q}{T}$ . Le



deuxième cas étant validé, on peut écrire  $(S_F - S_I)_b = \int_{T_2}^{T_{\text{VAP}}} \frac{mc_L dT}{T} + \frac{(m - x_b)\ell_{\text{VAP}}}{T_{\text{VAP}}}$  soit

$$(S_F - S_I)_b = mc_L \ln\left(\frac{T_{\text{VAP}}}{T_2}\right) + \frac{(m - x_b)\ell_{\text{VAP}}}{T_{\text{VAP}}}.$$

4) La variation d'entropie totale est donc

$$S_F - S_I = mc_{p,\text{VAP}} \ln\left(\frac{T_{\text{VAP}}}{T_1}\right) - \frac{x_a \ell_{\text{VAP}}}{T_{\text{VAP}}} + mc_L \ln\left(\frac{T_{\text{VAP}}}{T_2}\right) + \frac{(m - x_b)\ell_{\text{VAP}}}{T_{\text{VAP}}}$$
 soit

$$S_F - S_I = mc_{p,\text{VAP}} \ln\left(\frac{T_{\text{VAP}}}{T_1}\right) + mc_L \ln\left(\frac{T_{\text{VAP}}}{T_2}\right) + \frac{(m - x)\ell_{\text{VAP}}}{T_{\text{VAP}}}.$$

A.N.  $S_F - S_I = (10^{-3})(2000) \ln\left(\frac{373}{423}\right) + (10^{-3})(4200) \ln\left(\frac{373}{283}\right) + \frac{(1 - 1,12)(10^{-3})(2260 \times 10^3)}{373} = 0,18 \text{ J.K}^{-1}.$

Le système complet est isolé de l'extérieur et sa transformation réelle est irréversible. Sa variation d'entropie est donc positive et uniquement due à la création d'entropie par irréversibilité.

---